**L'effet Zeeman orbital.** Exercice standard utilisant la théorie des perturbations et assez proche de la PC4 sur l'effet Stark. Dans cet exercice, on néglige la variable interne de spin.

1) On notera les états propres de l'atome d'hydrogène $|nlm>$ avec $<\mathbf{r}|nlm>= \psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$, $Y_{lm}$ harmonique sphérique telle que $\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm}$ et $\hat{L}_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm}$.

L'hamiltonien de perturbation s'écrit : $\hat{H}_{mag} = q\hat{L}_z B/(2m_e)$ avec l'opérateur $\hat{L}_z$ qui agit sur les états propres $|nlm>$ de l'atome d'hydrogène selon : $\hat{L}_z|nlm>= m\hbar|nlm>$. L'état fondamental $|100>$ est non-dégénéré et on applique donc la théorie de perturbation au premier ordre dans le cas non-dégénéré (question A3 de la PC4 et cours page 195) : $\Delta E =< 100|H_{mag}|100>$ qui est nul puisque m=0 pour le fondamental. Au premier ordre, il n'y a pas de déplacement.

2) Le niveau (n=2) est dégénéré 4-fois puisque l'état $|200>$ (état 2s avec n=2, l=m=0) et les états $|21m>$ (état 2p avec n=2, l=1, m=-1,0,1) sont à la même énergie $E_2 = -E_I/n^2$ avec n=2 ($E_I$= 1 rydberg=13.6 eV). Il faut donc appliquer la théorie de perturbation d'un niveau dégénéré (question C de la PC4 et cours page 195-196), c'est-à-dire **diagonaliser la restriction de la perturbation $H_{mag}$ au**

**sous-espace (n=2).**

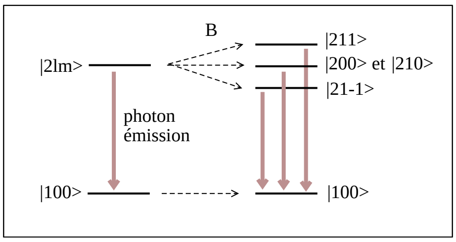
Dans le cas présent, la diagonalisation est triviale car les états $|nlm>$ sont des états propres de $H_{mag}$ avec $H_{mag}|nlm>= m(qB\hbar/2m_e)|nlm>$. $H_{mag}$ est donc diagonal dans la base $|2lm>$ du niveau (n=2). Les états avec (m=0) ne sont pas déplacés (états 2s et $2p_z$) alors que les états $|21m>$ avec m=$\pm$1 sont déplacés de $\pm(qB\hbar/2m_e)$. Il y a levée partielle de la dégénerescence et apparition de 3 niveaux d'énergie dont la séparation $(qB\hbar/2m_e)$ croît avec le champ.

**Attention :** en général, la perturbation n'a aucune raison d'être diagonale dans la base choisie du sous-espace considéré. Ne prendre que les termes $< n|\hat{W}|n >$ sur la diagonale (avec les notations de la PC4) est donc faux ! ! Il faut vraiment diagonaliser la matrice $[W_{nm}] =< n|\hat{W}|m >$ dans le sous-espace de dégénerescence pour avoir les corrections aux énergies et les vecteurs propres perturbés.

3) Résultats inchangés car l'atome d'hydrogène est un système à symmétrie sphérique.

4) On calcule : $qB\hbar/2m_e = 5.8 \times 10^{-6}$ eV qui est bien négligeable devant la différence d'énergie entre le niveau n=2 et les niveaux voisins n=1 et n=3, avec $E_n^0 = -13.6/n^2$ eVs.

4) Comme nous l'avons vu, le niveau n=1 ne bouge pas au première ordre et le niveau n=2 est éclaté en trois sous niveau. La raie d'émission (n=2 $\rightarrow$ n=1) devient triple quand on allume le champ magnétique.




5) **Complément.** Voir correction paragraphe 5.3 page 322 du cours).

## CORRECTION Interaction Electron-champs Electrique (7)

On considère un atome d'hydrogène, interagissant avec une onde électromagnétique. Cette interaction induit plusieurs forces sur l'électron. Une force d'interaction avec le champ (qE) qui tend à « éloigné » l'électron et une force de rappel (Ar) qui tend à le faire osciller sur son orbite à la manière d'un oscillateur harmonique (vision classique).

Le Hamilonien du système s'écrit :

$$H=H_0 + H_E + V_{rap}$$

Ou $H_0$ est l'Hamiltonien non perturbé de l'atome, $H_E$ le Hamiltonien d'interaction avec le champ E et $V_{rap}(r^2)$, le Hamiltonien associé à la force de rappel. Dans cet exercice, nous allons intéresser uniquement à l'hamiltonien associé à la force de rappel induite par l'onde électromagnétique et comparer la description classique à la description quantique de cette oscillation en supposant $H_E << V_{rap}$.

*Traitement Classique*

La solution générale de l'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique s'écrit :

$$q_{classique}=A\sin(\omega t+\delta)$$

a) Quel est la nature du mouvement. (Période, déphasage…)

   Rep : Trivial

b) Donner l'expression de l'impulsion p pour cet oscillateur de masse m.

   Rep : p->=mv-> à une dimension p=mv avec $v=dq/dt=A\omega\cos(\omega t+\delta)$

c) Donner l'expression de l'énergie mécanique du système $E_{classique}$.

   Rep : $E=Ec+Ep=0.5m(dq/dt)^2+0.5kq^2=$…

   D'ou $E=0.5m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\delta) + 0.5A^2k\sin^2(\omega t+\delta)=m\omega^2A^2/2$ (note : $\omega^2=k/m$)

d) Donner les valeurs moyennes $q_{classique}$, $p_{classique}$ par rapport au temps. On les notera $<q>_c$ et $<p>_c$

   Rep : $<\sin>=<\cos>=0$ par rapport au temps.

e) Donner les valeurs moyennes $<q^2>$ et $<p^2>$ en fonction de $E_{classique}$ trouvée à la question c, montrer que les énergies cinétique moyenne et potentielle moyenne de l'oscillateur sont égales

   Rep : $<\cos^2>=<\sin^2>=1/2$ d'où $<q^2>=E/m\omega^2$ et $<p^2>=mE$

   Note : la conservation de l'énergie mécanique impose E(Ec=0, Ep=max)=E(Ec=max, Ep=0) car forces conservative. D'où <Ec>=<Ep>= on en déduit également que $\omega^2=k/m_e$

*Traitement Quantique de l'oscillateur*

Le Hamiltonien de l'électron soumis à la force de rappel s'écrit :

$$H_{rap} =1/2(P^2+Q^2) \text{ avec } Q=q(m\omega/\hbar)^{1/2} \text{ et } P=p(1/m\hbar\omega)^{1/2}.$$

Soit |n> les états propres associés à l'oscillateur. Les énergies du système s'écrivent $E_n=(n+1/2)\hbar\omega$

Contrairement au cas classique les observables impulsions p et position q n'ont pas de valeurs définies. Elles sont dans cette description quantique associées à des distributions statistiques.

a) Soit les opérateurs $a=(1/2)^{1/2}[Q+iP]$ et $a^+=(1/2)^{1/2}[Q-iP]$. Exprimer H en fonction a et $a^+$. On donnera également l'expression de q et de p en fonction de a et $a^+$.

Les valeurs propres de a et a+ dans la base des {|n>} s'écrivent :

$a^+ \ |n> = (n+1)^{1/2}\,|n+1>$ (1)

$a \ \ |n> = n^{1/2}\,|n-1>$ (2)

Rep :$H=0.5(aa^+ + a^+a) = 0.5[Q^2+P^2]$

rque attention l'ordre des opérateurs $a,a^+$ est important dans le cas gnl.

on a également : $p=i(h/2m\omega)^{1/2}[a^+ + a]$ et $q=i(mh\omega/2)^{1/2}[a^+-a]$

b) Donner l'expression, en notation de Dirac, des éléments de matrice associés à p et de q sur la base des états propres {|n>}.

$<n'|H|n>=1/2<n'|aa^+ + a^+a|n>=1/2\ [<n'|aa^+|n> + <n'|a^+a|n>]$

Avec

$<n'|aa^+|n> = <n'|a\ (n+1)^{1/2}\ |n+1> = (n+1)<n'|n> = (n+1)\ \delta(n',n)$

$<n'|a^+a|n> = <n'|a^+\ n^{1/2}|n-1> = n<n'|n> =n\ \delta(n',n)$

D'où $<n'|H|n>=0.5(2n+1)\ \delta(n',n)=(n+1/2)\ \delta(n',n)=En$ (à h/2PI près)

Note : h–>h/2PI

Quels sont les éléments de matrice correspondant aux valeurs moyennes de <p> et <q> les calculer. Comparer au cas classique.

Rep : Ce sont les éléments de matrice diagonaux seuls non nul (n=n'). Contrairement au cas classique la valeur moyenne n'est pas nulle !

c) Que vaut <n|n'> ? En déduire l'expression des éléments de matrice $<n|q^2|n'>$ et $<n|p^2|n'>$ en fonction de $E_n$.

Rep : 0 car |n> et |n'> sont des vecteurs de base orthogonaux. On utilise l'expression de q et p en fonction de a et $a^+$ en remarquant que $q^2=(h/m\omega)a^+a$ et $p^2=mh\omega a+a$ d'où il vient $<p^2>=mhEn$ et $<q^2>=En/(hm\omega)$

Note : h–>h/2PI

d) Comparer au cas classique et discuter de l'équivalence Quantique / Classique pour l'oscillateur.

Rep : On retrouve les expressions de $<p^2>$ et $<q^2>$ du cas classique mais avec cette fois ci l'énergie quantifiée

# Utilisation du technétium en médecine nucléaire

## Découverte $Z = 43$

1) Noyaux isotopes même $Z$, $\neq A$

2) a) cs de $Z$, de $A$

b) Synthèse $^{96}_{42}Mo + ^{2}_{1}D \longrightarrow ^{97}_{43}Tc + ^{1}_{0}e$

$X \equiv$ positon

## Production $^{99}_{43}Tc$

3) $^{99}_{42}Mo \longrightarrow ^{99}_{43}Tc + ^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$ $\Rightarrow$ désintégration $\beta^-$

4) $E = {}^{99}_{42}mc^2 - {}^{99}_{43}mc^2$ AN: $E = 3{,}01\ 10^{-13}\ J = 1{,}887\ MeV$

## Scintigraphie

5) Temps de demi-vie : temps au bout duquel, une population radioactive est divisée par 2

6) $N(t)$ $\mathcal{A}(t) = \lambda N(t)$ avec $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

$\lambda$ cste radioactive

$= \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \mathcal{A}_0$ activité initiale

7) Mardi 14h Injection $\mathcal{A}_0 = 555\ MBq$ $T_{1/2} = 6h = 21600$

$N_0 = \dfrac{\mathcal{A}_0}{\lambda}$ $\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} = 3{,}209\ 10^{-5}\ s^{-1}$

AN: $N_0 = 1{,}73\ 10^{13}$ noyaux

8) Heure fin d'exam $\dfrac{N}{N_0} = 0{,}63$ à $t_{fin}$

$\dfrac{N}{N_0} = e^{-\lambda t_{fin}} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{N}{N_0}\right) = -\lambda t_{fin}$

soit $t_{fin} = \dfrac{1}{\lambda} \ln\left(\dfrac{N_0}{N}\right)$

AN: $t_{fin} = 1{,}44\ 10^{4}\ s = 3{,}999\ h \Rightarrow$ horaire $18^h$

9) 100 % à 50 % $e_{1/2} = \dfrac{0{,}65}{1{,}9} \times 1\ mm = 0{,}34\ mm$